

Previously on Beligiannis

$(R, +, \cdot)$: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα $1 = 1_R$

$$A(R) = \{(a_n)_{n \geq 0} \mid a_n \in R, \forall n \geq 0\}$$

$$\bullet (a_n)_{n \geq 0} + (b_n)_{n \geq 0} = (c_n)_{n \geq 0}, \text{ όπου } c_n = a_n + b_n$$

$$\bullet (a_n)_{n \geq 0} \cdot (b_n)_{n \geq 0} = (c_n)_{n \geq 0}, \text{ όπου } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Πρόταση: Η τριάδα $(A(R), +, \cdot)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, ο οποίος καλείται ο δακτύλιος των τυπικών συναρτήσεων υπέρνω του R και συμβολίζεται $R[[t]]$

Θεωρούμε την ακολουθία $1_{R[[t]]} = (1_R, 0, \dots, 0, \dots)$

$$= (a_n)_{n \geq 0}, \text{ όπου } a_0 = 1_R \text{ και } a_k = 0, \forall k \geq 1$$

$\hookrightarrow$ Η μονάδα του δακτύλιου $R[[t]]$

Έστω η ακολουθία $t = (0, 1_R, 0, \dots, 0) = (a_n)_{n \geq 0}$

$$\text{όπου } a_0 = 0, a_1 = 1_R, a_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$

$$t \cdot t = (0, 0, 1_R, 0, \dots, 0, \dots) \stackrel{\text{συμπ.}}{=} t^2$$

$$\begin{array}{c} t \cdot t \cdot \dots \cdot t = (0, 0, \dots, 0, 1_R, 0, \dots) \stackrel{\text{συμπ.}}{=} t^n \\ \text{v-φορές} \quad \downarrow \\ \text{(v+1)-θέση} \end{array}$$

NO:

Date:

Έχουμε ορίσει τις ακολουθίες t^n , $\forall n \geq 0$, όπου $t^0 = 1 \in \mathbb{R}[t]$

Αν $z \in \mathbb{R}$ και $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}[t]$, τότε

$$(1, 0, 0, \dots, 0, \dots) (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

συντ. $r(a_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \geq 0} &= (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (a_0, 0, 0, \dots, 0, \dots) + \\ &+ (0, a_1, \dots, 0, \dots) + \dots + (0, 0, \dots, 0, a_n, 0, \dots) + \dots = \\ &= a_0 \cdot 1 \in \mathbb{R}[t] + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \end{aligned}$$

Θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbb{R}[t]$ του $\mathbb{R}[t]$ το οποίο ορίζουμε ως εξής:

$$\mathbb{R}[t] = \left\{ (a_n)_{n \geq 0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{R}[t] \mid \exists k \in \mathbb{N} : a_n = 0, \forall n > k \right\}$$

Αν $(a_n)_{n \geq 0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ και $a_n = 0, \forall n > k$, τότε:

$$(a_n)_{n \geq 0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 1 \in \mathbb{R}[t] + a_1 t + \dots + a_{k-1} t^{k-1} + a_k t^k$$

Άρα ένα τυπικό στοιχείο του $R[t]$ είναι της μορφής

$$P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k = a_0 [R[t]] + a_1 t + \dots + a_n t^n =$$

$$= a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

Ορισμός: Κάθε στοιχείο του συνόλου $R[t]$ καλείται πολυώνυμο υπεράνω του R .

Για παράδειγμα αν $R = \mathbb{Z}_2$, τότε έχουμε το σύνολο των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{Z}_2[t]$

$$P(t) = t^2 - t : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$\hookrightarrow ([0]_2, [1]_2)$$

$$P([0]_2) = [0]_2$$

(Είναι η μηδενική συνάρτηση αλλά όχι το μηδενικό πολυώνυμο.)

$$P([1]_2) = [1]_2^2 - [1]_2 = [1]_2 - [1]_2 = [0]_2$$

Παρατήρηση: Γενικά τα πολυώνυμα δε συμπίπτουν με τις πολυωνυμικές συναρτήσεις
Αυτό συμβαίνει αν $|R| = \infty$

• Δακτύλιοι πινάκων

Έστω R : δακτύλιος με μονάδα

Ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία απ' το R είναι μια συνάρτηση $f: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow R$ και
 $(i, j) \mapsto f(i, j) \in R$

NO:

Date:

Ένας τέτοιος $n \times n$ πίνακας f συμβολίζεται πάντα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ όπου } a_{ij} = f(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο σύνολο

$$M_n(R) = \{A \mid A: n \times n \text{ πίνακας με στοιχεία από το } R\}$$

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$$

$$A+B = \Gamma = (\gamma_{ij}), \text{ όπου } \gamma_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$AB = \Gamma = (\gamma_{ij}), \text{ όπου } \gamma_{ij} = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Η τριάδα $(M_n(R), +, \cdot)$ είναι ένας δακτύλιος με μονάδα, τον $I_n = \begin{pmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & \ddots & 1_R \end{pmatrix}$

Έστω R : δακτύλιος με μονάδα

$$\begin{aligned} \text{Αν } r, s \in R, \text{ τότε: } (r+s)(r+s) &= (r+s)r + (r+s)s = \\ &= r \cdot r + r \cdot s + s \cdot r + s \cdot s = r^2 + r \cdot s + s \cdot r + s^2 \neq r^2 + 2rs + s^2 \end{aligned}$$

NO:

Date:

Πρόταση: Έστω R : Σακτούδιος με μονάδα και $r, s \in R$.

Τότε θέτοντας $\underbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{n \text{ φορές}} = r^n, \forall n \geq 0, r^0 = 1_R$

$$\textcircled{1} \forall n, m \geq 1 : \begin{cases} r^{n+m} = r^n \cdot r^m \\ (r^n)^m = r^{n+m} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ Αν } r \cdot s = s \cdot r, \text{ τότε: } (r+s)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{n-k} s^k$$

$\textcircled{3} \text{ Αν } r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_m \in R, \text{ τότε:}$

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i \right) \left(\sum_{j=1}^m s_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n,m} r_i s_j$$

$\textcircled{4} \forall r \in R \text{ και } \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ ορίζουμε}$

$$n \cdot r \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} r + r + \dots + r \text{ (} n \text{ φορές)}, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ (-r) + (-r) + \dots + (-r) \text{ (} -n \text{ φορές)}, & \text{αν } n < 0 \end{cases}$$

Τότε, $\forall r, s \in R \text{ και } \forall n \in \mathbb{Z}$

$$n(r \cdot s) = r(ns) = (nr)s$$

Ορισμός: Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος κι έστω $S \subseteq R$

Τότε το S καλείται υποδακτύλιος του $R \iff$

$$\textcircled{1} 0_R \in S \quad \textcircled{2} \forall x, y \in S: x - y \in S \quad \textcircled{3} \forall x, y \in S: xy \in S$$

Πρόταση: Το υποσύνολο S του δακτύλιου R είναι υποδακτύλιος του $R \iff$

Το S είναι κλειστό στις πράξεις $+$, $\cdot$ του δακτύλιου R και $\in$ τις επαχθύνες πράξεις, η τριάδα $(S, +, \cdot)$ είναι δακτύλιος.

Παράδειγμα: Στο δακτύλιο $\mathbb{Z}$, το υποσύνολο $2\mathbb{Z}$ (άρτιοι) είναι υποδακτύλιος.

Αν υπάρχει $2k \in 2\mathbb{Z}: \forall 2n \in 2\mathbb{Z}: 2n \cdot 2k = 2n \implies$

$$\implies 2 \cancel{4}nk = 2n \implies 2nk = n \implies 2k = 1 = \text{άτοπο, διότι } k \in \mathbb{Z}$$

Παράδειγμα: Έστω $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$: δακτύλιος με πράξεις

Ακριβέστερα, το R είναι υποδακτύλιος του $M_2(R)$ τις συνήδεις $+$, $\cdot$

$$\text{Αν } \exists \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R: \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ δε μπορεί να ισχύει}$$

Άρα ο R δεν έχει μονάδα!

Έστω $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \mid a \in R \right\}$: υποδακτύλιος του R :
υποδακτύλιος του $M_2(R)$

Ο S έχει μονάδα, τον $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Έστω R : δακτύλιος με μονάδα. Έστω $r \in R$

① Το r καλείται αντιστρέψιμο $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists s \in R : r \cdot s = 1_R = s \cdot r$$

Συμβολίζουμε $U(R) = \{ r \in R \mid r : \text{αντιστρέψιμο} \}$

Πομπήσιμος: Το $U(R)$ είναι κλειστό στην πράξη του πολ/τού και το ζεύγος $(U(R), \cdot)$ είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του R

NO:

Date:

Απόδειξη: $U(R) \neq \emptyset$, διότι: $1_R \in U(R)$

Αν $r_1, r_2 \in U(R) \Rightarrow \exists s_1, s_2 \in R$:

$$r_1 s_1 = 1_R = s_1 r_1 \quad \text{και} \quad r_2 s_2 = 1_R = s_2 r_2$$

Τότε $r_1 r_2 \in U(R)$, διότι: $r_1 r_2 s_2 s_1 = r_1 1_R s_1 = r_1 s_1 = 1_R$

$$s_2 s_1 r_1 r_2 = s_2 1_R r_2 = s_2 r_2 = 1_R$$

① Η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική στο R άρα και στο $U(R)$.

② Ουδέτερο στοιχείο: $1_R \in U(R)$

③ Αν $r \in U(R)$, τότε: $\exists s \in R$: $rs = 1_R = sr$ και τότε το s είναι το αντίστροφο του r ως προς την $\cdot$.

Γνωρίζουμε ότι το s είναι μοναδικό ως προς την

ιδιότητα: $r \cdot s = 1_R = s \cdot r$, και γράφουμε: $s = r^{-1}$